

Concursul Național de Matematică "Olimpiada satelor din România"
Etapa județeană 12.03.2022
Clasa a VIII-a

Problema 1 (7 puncte)

Determinați intervalul de numere reale $[a, b]$ știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

- a) $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \emptyset$
- b) $|b - a - 1| = a^2 + b^2 + \frac{a}{2} - 2b + \frac{21}{16}$

Problema 2 (7 puncte)

Se consideră numerele naturale nenule x și y cu proprietatea că

$$9^{x-1} + 9^{y+1} \leq 2 \cdot 3^{x+y}. \text{ Arătați că } \sqrt{3^x + 3^y} \text{ este un număr irațional.}$$

Problema 3 (7 puncte)

În triunghiul dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$, $AB = 6$ cm, $BC = 6\sqrt{3}$ cm considerăm M mijlocul segmentului AC și P piciorul perpendicularei din M pe BC . Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara $PQ \perp (ABC)$, $Q \notin (ABC)$, $PQ = 2$ cm. Calculați:

- a) lungimea segmentului MQ
- b) distanța de la Q la AM
- c) cosinusul unghiului diedru format de planele (MPQ) și (QPR) , unde R este piciorul perpendicularei din Q pe AB .

Problema 4 (7 puncte)

$ABCD A'B'C'D'$ este cub. Fie $CE \perp OC'$, $E \in OC'$, $BE \cap DC' = \{M\}$, $DE \cap BC' = \{N\}$, O fiind centrul pătratului $ABCD$. Arătați că:

- a) $MN \parallel (ABC)$
- b) $(A'BD) \parallel (CMN)$