

**Concursul național de matematică “Olimpiada Satelor din România”
- ediția a XI-a -****ETAPA a II-a (etapa județeană) 12.03.2022****Clasa a VII-a****Problema 1. (7 puncte)**

- a) Arătați că numărul $\sqrt{2021^{2022} + 2022^{2021}}$ este irațional.
- b) Determinați $x \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+x} = \frac{4044}{2023}$

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră trapezul ABCD isoscel, ortodiagonal (cu diagonalele perpendiculare) cu $AB \parallel CD$.

- a) Demonstrați că lungimea înălțimii trapezului este egală cu lungimea liniei mijlocii a trapezului.
- b) Arătați că dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar paralela prin O la bazele trapezului intersectează laturile AD și BC în punctul M, respectiv în N, atunci $MN = \frac{2 \cdot AB \cdot CD}{AB + CD}$.

Problema 3. (7 puncte)

Determinați perechile de numere naturale (a, b) , $1 \leq a < b$, cu proprietatea că numărul pătratelor perfecte cuprinse între $a^2 - 1$ și $b^2 + 1$ este egal cu $\frac{1}{50}$ din cardinalul mulțimii numerelor întregi cuprinse (strict) între a^2 și b^2 .

Problema 4. (7 puncte)

Fie \mathcal{C} cercul circumscris triunghiului ABC. Tangentele duse la cercul \mathcal{C} în punctele A și B se intersectează în punctul P, iar mediatoarea laturii [BC] taie dreapta AC în punctul Q.

- a) Demonstrați că dreptele PQ și BC sunt paralele
- b) Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în vârful A, arătați că $PQ = R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru - 2 ore.